14/11/2016

Δινεται η ακολουθια $a_n = \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$

a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9

0 -1 0 1 0 -1 0 1

Να βρεθούν όλα τα δυνατά όρια υπακολουθιών της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$a_{2n-1} = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) = \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \to 0$

$a_{4n+2} = \cos\left(\frac{(4n+2)\pi}{2}\right) = \cos(2n\pi + \pi) = -1 \to -1$

$a_{4n} = \cos\left(\frac{(4n)\pi}{2}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \to 1$

Εστω $x \notin \{-1, 0, 1\}$

Θα δ.ο. δεν υπάρχει καμία υπακολουθια της $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που να συγκλίνει στο x

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ ώστε

$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \{-1, 0, 1\} = \emptyset$

Το διάστημα $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ δεν περιέχει κανένα όριο της (a_n) αρα καμία υπακολουθια της (a_n) δεν μπορεί να συγκλίνει στο x

Ορισμός

Εστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών
Λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός x είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας (a_n) αν υπάρχει υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $a_{k_n} \to x$

Παράδειγμα

Για την ακολουθία $a_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ τα μοναδικά σημεία συσσώρευσης είναι τα $-1, 0, 1$

Εστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$

Εστω K το σύνολο των σημείων συσσώρευσης της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Απο το Θεώρημα Bolzano - Weierstrass προκύπτει ότι $K \neq \emptyset$

Το σύνολο K είναι και φραγμένο
(διότι αν $m \leq a_n \leq M \quad \forall n\in\mathbb{N}$
τότε $m \leq x \leq M$ για κάθε $x\in K$)

Αρα το σύνολο K έχει supremum και infimum

Θέτουμε $\limsup a_n = \sup K$ (ανώτατο όριο) $\quad \liminf a_n = \inf K$ (κατώτατο όριο)

Αποδεικνύεται ότι $\sup K \in K$
και $\inf K \in K$

Προφανώς $\liminf a_n \leq \limsup a_n$

<u>Θεώρημα</u>

Αν (a_n) μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών, $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

α) $\limsup a_n \geq x \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n > x - \varepsilon\}$ είναι άπειρο

β) $\limsup a_n \leq x \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : x + \varepsilon < a_n\}$ είναι πεπερασμένο

γ) $\liminf a_n \leq x \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n < x + \varepsilon\}$ είναι άπειρο

δ) $\liminf a_n \geq x \Leftrightarrow$ Για κάθε $\varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \;\; a_n < x - \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο

Αποδ. παραλείπεται

Έστω (a_n) μια φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $b_n = \sup\{a_k \;\; k \geq n\}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\{a_k, k \geq n\} \supseteq \{a_k \;\; k \geq n+1\}$

άρα $\underbrace{\sup\{a_k \;\; k \geq n\}}_{b_n} \geq \underbrace{\sup\{a_k \;\; k \geq n+1\}}_{b_{n+1}}$

άρα (b_n) φθίνουσα

Η (b_n) είναι φθίνουσα και φραγμένη άρα συγκλίνουσα

Αποδεικνύεται ότι $\lim b_n = \limsup a_n$

Ομοίως αν θέσουμε

$\gamma_n = \inf\{a_k \quad k \geq n\}$ για $n \in \mathbb{N}$
αποδεικνύεται ότι η (γ_n) είναι αύξουσα και
$\lim \gamma_n = \liminf a_n$

Αποδεικνύεται ότι αν $\liminf a_n = \limsup a_n$ τότε η κοινή τιμή είναι το όριο της a_n

Ενώ αν $\liminf a_n < \limsup a_n$ τότε η (a_n) δεν έχει όριο

Άσκηση

1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{5n}\right)^{5n}$

Εφόσον για την $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ισχύει $x_n \to e$
και $a_n = x_{5n}$ η (a_n) είναι υπακολουθία της (x_n)
άρα $a_n \to e$

2) $b_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{3n} = \left[\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right]^{3/4}$

η $\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}$ συγκλίνει στο e (ως υπακολουθία της $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

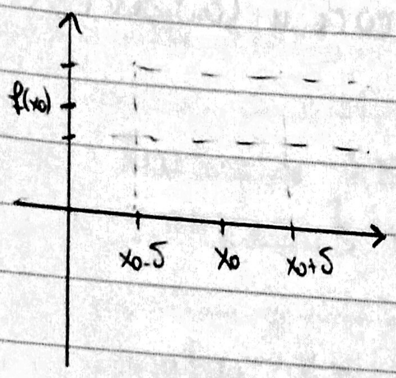
άρα $b_n \to e^{3/4}$

Συνέχεια συναρτήσεων - Όρια συναρτήσεων

Ορισμός Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση (όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ με $A \neq \emptyset$) και $x_0 \in A$

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει ότι $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $x_0 \in A$



Παραδείγματα

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (όπου $c \in \mathbb{R}$)

Θα δ.ο. η f είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon > 0$

Επιλέγουμε τυχαίο $\delta > 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$

ισχύει

$|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_0

Επομένως η f είναι συνεχής

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x$

Θα δ.ο. η f είναι συνεχής. Σταθεροποιούμε $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon > 0$

Θέτουμε $\delta = \varepsilon$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ ισχύει

$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$

Συνεπώς η f είναι συνεχής στο x_0. Επομένως η f είναι συνεχής

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 5x + 3$

Θα δ.ο. η f είναι συνεχής

Σταθεροποιούμε $x_0 \in \mathbb{R}$

Έστω $\varepsilon > 0$

Θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$

ισχύει

$|f(x) - f(x_0)| = |(5x+3) - (5x_0+3)| = |5(x - x_0)|$

$< 5|x - x_0| < 5\delta = 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$ Άρα f συνεχής στο x_0

Επομένως συνεχής

4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$

Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής

Σταθεροποιούμε $x_0 \in \mathbb{R}$

Θα δ.ο. η f είναι συνεχής στο x_0

Έστω $\varepsilon > 0$

$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0|$

Αφού το δ το επιλέγουμε εμείς μπορούμε να το επιλέξουμε

ώστε $\delta \leq 1$

Για κάθε x με $|x-x_0|<\delta$

$$|x+x_0| = |x-x_0+2x_0| \leq |x-x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0| \leq 1+2|x_0|$$

Έτσι $|f(x) - f(x_0)| = |x+x_0|\,|x-x_0|$

$< (1+2|x_0|)\,|x-x_0|$

Επειδή θέλαμε αυτή η ποσότητα να είναι $<\varepsilon$

Θέτουμε $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$

Θέτουμε $\delta = \min\left\{1, \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\right\}$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $|x-x_0|<\delta$ $\qquad \delta \leq \dfrac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$

εφόσον $\delta \leq 1$

$$|f(x)-f(x_0)| = |x+x_0|\,|x-x_0| < (1+2|x_0|)(x-x_0) \leq (1+2|x_0|)\delta \leq \varepsilon$$

Ερώτημα

Πως αποδεικνύουμε ότι μια f δεν είναι συνεχής σε ένα x_0 του πεδίου ορισμού της

Η άρνηση του ορισμού

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in A$

Η f δεν είναι συνεχής στο x_0

$\exists\, \varepsilon>0 \quad \forall\, \delta>0$

$\exists\, x\in A$ ώστε $|x-x_0|<\delta$ και $|f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon$

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

(i) $a_n = \dfrac{M^n}{n!}$ (όπου $M \in \mathbb{R}$).

(ii) $\beta_n = \dfrac{5^n + n!}{11^n + 2n!}$.

(iii) $\gamma_n = \sqrt[n]{n!}$

(iv) $\delta_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$, $\epsilon_n = (1 + \frac{1}{2n})^n$, $\zeta_n = (1 + \frac{1}{4n})^{3n}$; $\eta_n = (1 + \frac{1}{n!})^{3n!}$.

2. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών με $a_n \to \ell$ όπου $\ell > 0$. Να δειχθεί ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Να δείξετε (χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα) ότι δεν ισχύει το ίδιο συμπέρασμα όταν $\ell = 0$.

3. Μια ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν οι υπακολουθίες της $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στο ίδιο όριο.

4. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ώστε οι υπακολουθίες της $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι συγκλίνουσες. Να δειχθεί ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. [Υπόδειξη: Βρείτε κοινή υπακολουθία των $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ και κοινή υπακολουθία των $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.]

5. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \frac{4+3a_n}{3+2a_n}$. Να δείξετε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της. [Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $a_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{4a_n+6}$ (ώστε να εμφανίζεται το a_n μόνο μια φορά στον τύπο και να είναι πιο εύκολη η διαχείριση).]

6. Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$. α) Δείξτε ότι $1 \le a_n \le 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. β) Δείξτε ότι η $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, η $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, ενώ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μονότονη (ούτε τελικά μονότονη). γ) Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και βρείτε το όριό της.

7. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών και $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών ώστε να ισχύει $\epsilon_n \to 0$ και $|a_{n+k} - a_n| < \epsilon_n$ για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.]

8. Δίνεται μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $0 < a < 1$ ώστε $|x_{n+1} - x_n| \le a^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy (και άρα συγκλίνουσα)].